

Premier problème : le rail de Laplace

Extrait du concours commun polytechnique (concours national Deug 2005)

Partie A : Électromagnétisme

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, le champ de pesanteur (avec $g > 0$).

Deux rails métalliques parallèles et distants de ℓ , parfaitement conducteurs, sont reliés par une tige conductrice **CD** rectiligne, de résistance R . Ces conducteurs constituent un ensemble rigide et immobile.

Afin de fermer le circuit, une barre métallique, de masse m , parfaitement conductrice, est posée sur les rails, orthogonalement à ceux-ci. Soient **A** et **B** les points de contact entre la barre et les rails. Cette barre peut effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, avec $B_0 > 0$.

I. Cadre horizontal dans un champ magnétique uniforme et constant

Le circuit **ABCD** est situé dans un plan horizontal et les rails sont maintenus parallèles à l'axe Ox . La barre est animée d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ (avec $v > 0$) (figure 1).

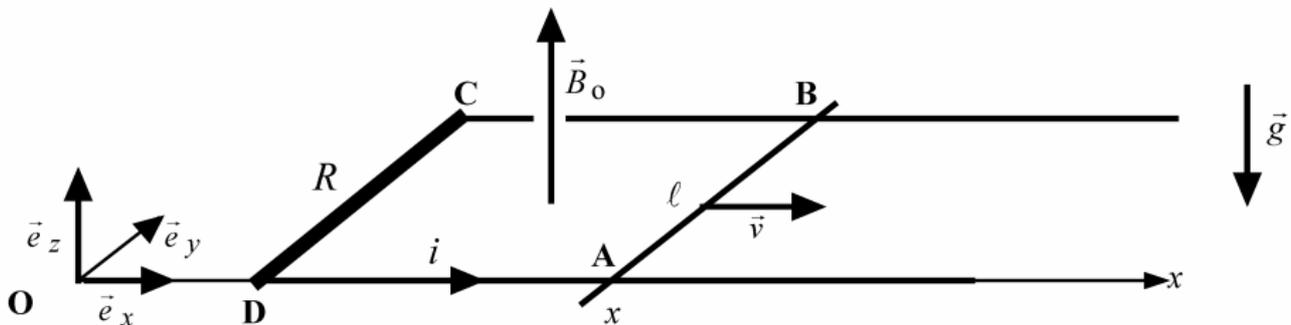


Figure 1

- 1) La position de la barre est repérée par son abscisse $DA = x$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre **ABCD**.
- 2) Montrer que, dans la barre, les porteurs de charge sont soumis à l'action d'un champ électromoteur \vec{E}_m . Donner l'expression vectorielle de ce champ \vec{E}_m .
- 3) Prendre en compte l'orientation indiquée sur la figure (1) et préciser le signe du courant i induit dans le circuit **ABCD**.
- 4) Exprimer, en fonction de R , v , B_0 et ℓ , l'intensité du courant i .
- 5) Ce courant induit s'accompagne de forces dites « de Laplace » appliquées à toutes les portions du circuit. Recopier la figure (1) en précisant la direction et le sens de la résultante \vec{F} des forces d'induction appliquées à la barre **AB**.

- 6) A l'instant initial $t = 0$, la barre est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ (avec $v_0 > 0$). Déterminer l'expression vectorielle de la vitesse $\vec{v}(t)$ au temps t .
- 7) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $v(t)$.
- 8) Une modification de la valeur de la résistance R peut-elle avoir une influence sur le mouvement de la barre ? Justifier.

II. Cadre incliné dans un champ magnétique uniforme et constant

Le cadre plan **ABCD** est maintenant incliné d'un angle α (constant) par rapport au plan horizontal. Les rails sont parallèles à l'axe Dx' (orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_{x'}$) et la tige **CD** est maintenue parallèle à l'axe Oy (orienté par le vecteur unitaire \vec{e}_y). La barre peut toujours effectuer un mouvement de translation sans frottement sur les rails (figure 2).

A l'instant initial $t = 0$, la barre est abandonnée sans vitesse initiale. Soit $\vec{v}' = v' \vec{e}_{x'}$, sa vitesse de translation au temps t .

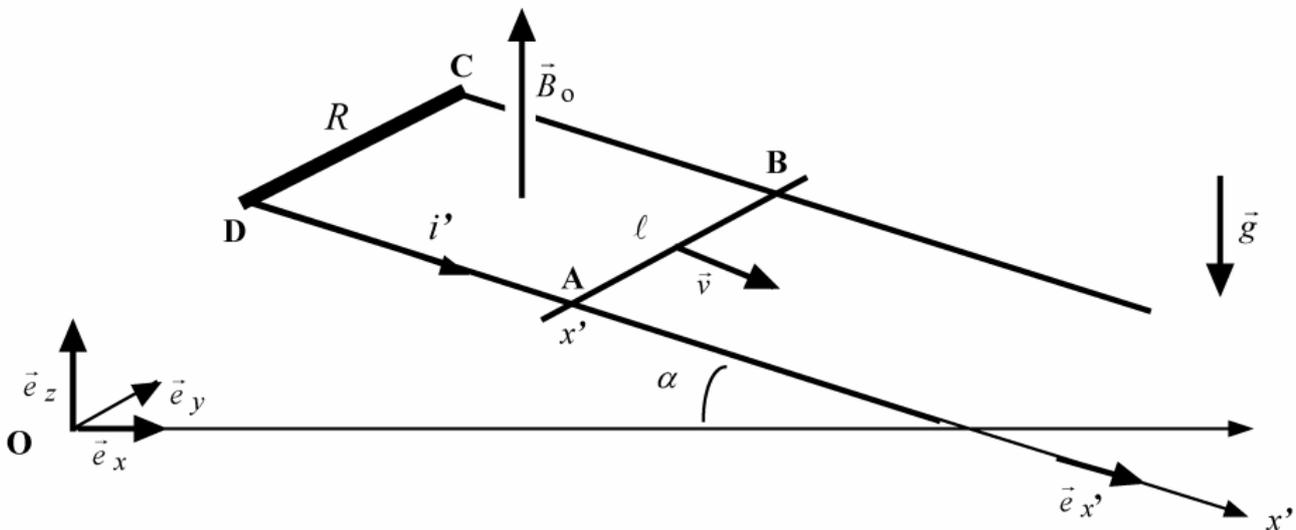


Figure 2

- 1) La position de la barre est repérée par son abscisse $DA = x'$. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le flux Φ' du champ magnétique à travers le cadre **ABCD**.
- 2) Exprimer, en fonction de R, v', B_0, l et α , l'intensité du courant induit i' .
- 3) Sur un schéma, faire l'inventaire, à $t > 0$, des forces qui s'exercent sur la barre.
- 4) Donner l'expression vectorielle de la résultante \vec{F}' des forces d'induction qui s'exercent sur la barre.
- 5) Établir l'équation différentielle liant la vitesse algébrique v' au temps t .
- 6) En déduire l'expression de $v'(t)$.
- 7) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $v'(t)$.